第26卷 第5期 2009年10月
工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS
Vol. 26 No. 5 Oct. 2009

文章编号:1005-3085(2009)05-0811-08

标的资产由分数维布朗运动驱动的亚式期权定价及套期保值*

刘宣会[1]， 薛 贇[1]， 徐成贤[2]

(1- 西安工程大学理学院，西安 710048； 2- 西安交通大学理学院，西安 710049)

摘 要: 在标的资产价格由分数维布朗运动驱动的假设下，文章研究了一种亚式期权的定价。我们利用Numeraire变换与复制首先将亚式期权定价转变为类似的欧式期权定价，然后运用Merton对冲风险的思想得到亚式期权的定价，最后运用Malliavin分析与一般地Clark公式给出亚式期权的套期保值策略。

关键词: 分数维布朗运动；亚式期权；Numeraire变换；对冲风险

分类号: **AMS**(2000) 91B28 **中图分类号**: F830.49 **文献标识码**: A

1 引言

在大多数的金融系统、系统控制及工程领域的应用中，一般认为系统中随机扰动为标准的布朗运动，然而现实中系统的随机扰动往往表现为大范围的相依性；即现实中系统的行为表现为在给定时间t后，系统的状态不仅依赖于t时刻的状况，而且也依赖于在时刻t以前的整个历史。

而在金融、通讯、网络等应用中遇到的另一个重要的系统特征，表现为一种自相似性，即过程$\{X_{\alpha t}, t\in[0,1]\}$与过程$\{\alpha^H X_t, t\in[0,1]\}$具有相同的概率分布。而分数维布朗运动正是具备上述这两种属性的最简单的随机过程。

然而Lin在[1]研究表明这种分数维布朗运动不具有马尔可夫性，也不是半鞅，因而精典的随机分析理论不能直接于这种分数维布朗运动，对于分数维布朗运动的积分理论目前有两种，一种以Wick积为基础的Wick积分，另一种为Stratonovich型积分理论。

在Wick积的基础上，文[2]研究了分数维布朗运动的积分理论，称它们为分式It'o型积分，并且证明了在股价服从分数维布朗运动时对应的金融市场的无套利性与完全性。文[3]在股票价格服从分数维布朗运动时，采用Stratonovich型积分研究了金融市场的完全性及期权的套期保值问题。

本文在[2,3]的基础上，研究了标的资产价格服从分数维布朗运动时，一种亚式期权的定价问题，采用分式It'o型积分理论，在金融市场为完全时，对标的资产价格的算术平均进行复制，然后运用Numeraire变换的方式将亚式期权(具有算术平均支付)定价问题简化为一种类似于欧式期权，然后利用Merton对冲风险的思想而得到原亚式期权的定价，最后运用Malliavin分析给出该期权的套期保值策略。

收稿日期: 2007-07-10. **作者简介**: 刘宣会(1964年11月生)，男，博士，副教授. 研究方向：金融数学与风险管理.
***基金项目**: 国家自然科学基金(70271021).

2 一些基本概念及结论

在分数维布朗运动中当 $H=\frac{1}{2}$ 时，就成为标准的布朗运动。当 $H\neq\frac{1}{2}$ 时，分数维布朗运动，既不是马尔可夫过程，也不是半鞅，而是比标准布朗运动更为一般的随机过程，考虑到本文的需要，下面先引入关于分数维布朗运动的分式It'o型积分理论。

定义1 设 $0<H<1$，如果一个高斯随机过程 $\{B_t^H, t\in\mathbf{R}^+\}$ 满足下列条件：

1) $E(B_t^H)=0$;

2) $E[B_t^H B_s^H]=\frac{1}{2}\{|t|^{2H}+|s|^{2H}-|t-s|^{2H}\}$,

对于所有 $s,t\in\mathbf{R}^+$ 都成立，那么 $\{B_t^H, t\in\mathbf{R}^+\}$ 称为具有Hurst参数H的分数维布朗运动。

如果 $H=\frac{1}{2}$ 时，$\{B_t^H, t\in\mathbf{R}^+\}$ 就成为标准的布朗运动。

设 $\Omega=C_0(\mathbf{R}_+,\mathbf{R})$ 为 $\mathbf{R}_+$ 上实值连续函数组成的空间，存在一个概率测度 P^H (在 $(\Omega,\mathcal{F})$) 相对应过程 $B^H:\Omega\to\mathbf{R}, B_t^H(w)=w(t), w\in\Omega$，为满足定义1中1)，2)条件的高斯过程，这时 B_t^H 为精典的分数维布朗运动。

3 模型建立

设金融市场有两种证券，一种为无风险证券，另一种为风险证券，设为股票，其中无风险证券价格为 $P_0(t)$，服从下列方程

$$\mathrm{d}P_0(t)=rp_0(t)\mathrm{d}t,\quad P_0(0)=1. \tag{1}$$

风险证券的价格为 $P(t)$, $P(t)$ 服从下列随机微分方程

$$\mathrm{d}P(t)=\mu P(t)\mathrm{d}t+\sigma P(t)\mathrm{d}B^H(t),\quad P(0)=P_0,\quad t\in[0,T], \tag{2}$$

其中 μ,σ 为常数，$B^H(t)$ 为 $(\Omega,\mathcal{F}^H,P^H)$ 上的分数维布朗运动且 $H\in(\frac{1}{2},1)$，以后为了表示方便记 $P(t)$ 为 P_t，$B^H(t)$ 为 B_t^H。由文[3]的结论表明由(1)-(2)构成的金融市场为无套利的完全市场。

设

$$\theta=\frac{\mu-r}{\sigma},\quad \frac{\mathrm{d}\widetilde{P}}{\mathrm{d}P^H}=\exp\Big\{\int_0^T\theta\mathrm{d}B_t^H-\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T\theta\varphi(t,s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\Big\},$$

若

$$E\Big\{\exp\Big(\int_0^T\int_0^T\theta\varphi(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\Big)\Big\}<\infty,\quad E\Big[\frac{\mathrm{d}\widetilde{P}}{\mathrm{d}P^H}\Big]=1,$$

那么

$$\widetilde{B}_t^H=B_t^H-\int_0^t\theta\varphi(t,s)\mathrm{d}s$$

为 $\widetilde{P}$ 下的分数维布朗运动，在风险中性测度 $\widetilde{P}$ 下风险证券的价格 P_t 为

$$\mathrm{d}p_t=rp_t\mathrm{d}t+\sigma p_t\mathrm{d}\widetilde{B}_t^H,\quad t\in[0,T].$$

现在考虑以(2)风险证券为标的资产具有下列支付函数

$$(\overline{P}_T-k_1P_T-k_2)^*\quad 或\quad (k_2-k_1P_T-\overline{P}_T)^+, \tag{3}$$

其中

$$\overline{P}_T=\frac{1}{T}\int_0^T P_t\mathrm{d}t\ (算术平均)$$

为亚式期权的定价，k_1, k_2 为常数。

4 亚式期权的定价方程

定理1 以(2)价格为标的资产，(3)为支付函数的亚式期权价值为$u(t,z_t)$，那么在模型2的条件下，$u(t,z_t)$满足下列方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\left[(q_t-z_t)\sigma D_t^{\varphi}z_t\right]\frac{\partial^2 u}{\partial z_t^2}+rz_t\frac{\partial u}{\partial z_t}-ru=0,\quad u(T:z_T)=(z_T-k_1)^T.$$

为了证明定理1的结论，我们首先引入下列引理。

引理1 (Fractional Clark-Ocone Theorem) 设$F\in L^2(p)$，并且F为$\mathcal{F}$可测，那么$\widetilde{E}_t[D_tF]\in L_{\varphi}^{1,2}$并且有

$$F(w)=\widetilde{E}[F]+\int_0^T\widetilde{E}_t[D_tF]\mathrm{d}\widetilde{B}_t^H.$$

关于$L_{\varphi}^{1,2}$，D_tF可参照[3]。

引理2 设$f\in L_{\varphi}^{1,2}$且

$$M(t)=\int_0^t f(s,w)\mathrm{d}B_t^H,$$

那么$M(t)$为$\mathcal{F}_t^H$拟鞅。

引理3 设

$$\mathrm{d}X(t)=\mu(t,w)\mathrm{d}t+\sigma(t,w)\mathrm{d}B_t^B,\quad \mu,\ \sigma\in L_{\varphi}^{1,2},$$

如果$f\in C^2(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R})$，那么

$$\begin{aligned}f(t,X(t)) &= f(0,X(0))+\int_0^t\frac{\partial f}{\partial s}(s,X(s))\mathrm{d}s+\int_0^t\frac{\partial f}{\partial x}(s,X(s))\mu(s)\mathrm{d}s\\&\quad+\int_0^t\frac{\partial f}{\partial x}(s,X(s))\sigma(s)\mathrm{d}B_s^H+\int_0^t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X(s))D_s^{\varphi}X(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

引理4 在模型(1)-(2)组成的金融市场上，对于有界的未定权益F, $F\in L^2(P)$，在任意时刻$t\in[0,T]$时价格为$F(t)=\mathrm{e}^{-r(T-t)}\widetilde{E}_t[F]$。

证明 由[3]结论可知模型(1)-(2)组成的金融市场为完全市场。因而存在a_t, b_t使得下式成立

$$F_t=a_tP_0(t)+b_tP_t,\quad t\in[0,T],\tag{4}$$

$$F_T=F.\tag{5}$$

对(4)进行微分可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F_t &= a_t\mathrm{d}P_0(t)+b_t\mathrm{d}p_t\\&= a_trP_0(t)\mathrm{d}t+b_t[rP_t\mathrm{d}t+\sigma P_t\mathrm{d}\widetilde{B}_t^H]=rF_t\mathrm{d}t+b_tP_t\mathrm{d}\widetilde{B}_t^H,\end{aligned}$$

那么

$$\mathrm{e}^{-rt}F_t=F(0)+\int_0^t\mathrm{e}^{-rs}\sigma b_sp_s\mathrm{d}\widetilde{B}_s^H.\tag{6}$$

由引理1可知

$$\mathrm{e}^{-rT}F=\widetilde{E}[F]+\mathrm{e}^{-rT}\int_0^T\widetilde{E}_t[D_tF]\mathrm{d}\widetilde{B}_t^H,$$

由市场的完全性，则有下列结论

$$\widetilde{E}_t[D_tF]=\mathrm{e}^{r(T-t)}\sigma b_tP_t,\quad t\in[0,T],$$

因而

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-rT}F &= \widetilde{E}[F]+\int_0^T \mathrm{e}^{-rt}\sigma b_tP_t\mathrm{d}\widetilde{B}_t^H\widetilde{E}_t[\mathrm{e}^{-rT}F]\\ &= \widetilde{E}[F]+\widetilde{E}_t\Big[\int_0^T \mathrm{e}^{-rt}\sigma b_tP_t\mathrm{d}\widetilde{B}_t^H\Big].\end{aligned}$$

由引理2可知上式即为

$$\widetilde{E}_t[\mathrm{e}^{-rT}F]=\widetilde{E}[F]+\int_0^t \mathrm{e}^{-rt}\sigma b_tp_t\mathrm{d}\widetilde{B}_t^H,\tag{7}$$

由(6)-(7)可知

$$F_t=\mathrm{e}^{-r(T-t)}\widetilde{E}_t[F].$$

定理1的证明 设在时刻t时在风险证券上的投资量为q_t, $t\in[0,T]$，不妨设q_t具有下列形式

$$q_t=\frac{1}{rT}[1-\mathrm{e}^{-r(T-T)}],\quad t\in[0,T],$$

那么由自融资策略$\dot{q}_t$而得到财富为X_t, X_t满足下列方程

$$\mathrm{d}X_t=q_t\mathrm{d}P_t+r(X_t-q_tP_t)\mathrm{d}t.$$

设投资者具有初始财富$x_0=q_0P_0-\mathrm{e}^{-rT}k_2$。这时

$$X_T=\mathrm{e}^{rT}x_0+\int_0^T q_t\mathrm{e}^{r(T-t)}(\mathrm{d}P_t-rP_t\mathrm{d}t),$$

而由于

$$\int_0^T \mathrm{e}^{r(T-t)}q_t(\mathrm{d}P_t-rP_t\mathrm{d}t)+\int_0^T \mathrm{e}^{r(T-t)}P_t\mathrm{d}q_t=q_Tp_T-\mathrm{e}^{rT}q_0p_0,$$

那么

$$\begin{aligned}X_T&=\mathrm{e}^{rT}x_0+q_Tp_T-\mathrm{e}^{rT}q_0p_0-\int_0^T \mathrm{e}^{r(T-t)}p_tq_t^1\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{T}\int_0^T p_t\mathrm{d}t-k_2=\widetilde{P}_T-k_2,\end{aligned}$$

$$(\overline{p}_T-k_1p_T-k_k)^+=(X_T-k_1p_T)^+=\Big[\Big(\frac{X_T}{p_T-k_1}\Big)p_T\Big]^+.$$

令$Z_t=\frac{X_t}{p_t}$，由引理3可知

$$\mathrm{d}Z_t=\mathrm{d}\Big(\frac{X_t}{p_t}\Big)=X_t\mathrm{d}\Big(\frac{1}{p_t}\Big)+\frac{1}{p_t}\mathrm{d}X_t.$$

而

$$\mathrm{d}\Big(\frac{1}{p_t}\Big) = -\frac{1}{p_t^2 p_t r}\mathrm{d}t - \frac{1}{p_t^2 \sigma p_t},$$

$$\mathrm{d}\widetilde{B}_t^H + \Big(\frac{2}{p^3\sigma p_t D_t^{\varphi} p_t}\Big)\mathrm{d}t = -\frac{r}{p_t}\mathrm{d}t - \frac{\sigma}{p_t}\mathrm{d}\widetilde{B}_t^H + \Big(\frac{2\sigma}{P_t^2 D_t^{\varphi} p_t}\Big)\mathrm{d}t,$$

$$D_t^{\varphi} p_t = \sigma p_t \int_0^t \varphi(s,\mu)\mathrm{d}\mu = \sigma H P_t t^{2H-1}.$$

因而就有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Z_t &= X_t\Big[-\frac{r}{p_t}\mathrm{d}t - \frac{\sigma}{p_t}\mathrm{d}\widetilde{B}_t^H + \frac{2\sigma^2}{p_t}Ht^{2H-1}\mathrm{d}t\Big] + \frac{1}{p_t}\big[q_t\mathrm{d}p_t + r(X_t - q_t p_t)\mathrm{d}t\big] \\ &= 2Z_t\sigma^2 Ht^{2H-1}\mathrm{d}t + (q_t - Z_t)\sigma\mathrm{d}\widetilde{B}_t^H = (q_t - Z_t)\sigma\mathrm{d}B_t^{*H},\end{aligned} \tag{8}$$

其中 B_t^{*H} 为 Numeraine 变换测度 p^* 下的分数维布朗运动。那么以 (3) 中价格为标的资产，(4) 为支付函数的亚式期权价值由引理 4 可知为

$$\begin{aligned}V(t:k_1,k_2,p_t) &= \mathrm{e}^{-r(T-t)}\widetilde{E}\big[(\bar{p}_T - k_1 p_T - k_2)^+ \mid \mathcal{F}_t\big] \\ &= \mathrm{e}^{-r(T-t)}\widetilde{E}\big[(X_T - k_1 p_T)^+ \mid \mathcal{F}_t\big] \\ &= p_0 E^*\big[(Z_T - k_1)^+ \mid \mathcal{F}_t\big] = u(t:z_t).\end{aligned} \tag{9}$$

现在我们建立下列投资组合

$$\pi = u(t:Z_t) - \Delta Z_t,$$

其中 Δ 表示在风险证券上的投资量。那么由引理 3 可知

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Pi &= \mathrm{d}u(t:Z_t) - \Delta\mathrm{d}Z_t \\ &= \Big[\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t + (q_t - Z_t)\sigma\frac{\partial u}{\partial Z_t}\mathrm{d}B_t^{*H} + (q_t - Z_t)\sigma D_t^{\varphi} Z_t\frac{\partial^2 u}{\partial Z_t^2}\mathrm{d}t\Big] - \Delta(q_t - Z_t)\sigma\mathrm{d}B_t^{*H}.\end{aligned}$$

由 [4] 可知：$D_t^{\varphi} Z_t$ 满足下列关系

$$D_t^{\varphi} Z_t = \int_0^t D_s^{\varphi}(q_\mu - Z_\mu)\sigma\mathrm{d}B_\mu^{*H} + \int_0^t (q_\mu - Z_\mu)\sigma\varphi(s,\mu)\mathrm{d}\mu, \tag{10}$$

而

$$\mathrm{d}\Pi = \Big[\frac{\partial\mu}{\partial t} + (q_t - Z_t)\sigma(D_t^{\varphi} Z_t)\frac{\partial^2 u}{\partial Z_t^2}\Big]\mathrm{d}t + \Big[(q_t - Z_t)\sigma\frac{\partial u}{\partial Z_t} - \Delta(q_t - Z_t)\sigma\Big]\mathrm{d}B_t^{*H}. \tag{11}$$

按照 Merton 对冲风险的思想选择 $\Delta = \frac{\partial u}{\partial Z_t}$ 消去由 B_t^{*H} 带来的系统风险。

由完全市场无套利原则

$$\mathrm{d}\Pi = \pi r\mathrm{d}t, \tag{12}$$

其中 r 为无险利率。由 (11)-(12) 可得

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (q_t - Z_t)\sigma(D_t^{\varphi})Z_t\frac{\partial^2 u}{\partial Z_t^2} + rZ_t\frac{\partial u}{\partial Z_t} - ru = 0,$$

$$u(T:Z_T) = (Z_T - k_1)^+.$$

5 套期保值策略

在模型2的支付函数 $(\overline{P}_T - k_1 P_T - k_2)^+$ 中，如果 $k_1 = 0$ 时为具有固定施权的看涨亚式期权。如果 $k_2 = 0$ 时为具有漂移权的看涨亚式期权。为了讨论问题的方便，在这儿我们只考虑第一种情形，即 $k_1 = 0$，对于另外的情形我们将另行讨论。

设投资者在 t 时刻的财富为 $v(t)$，初始值为 $v(0) = v_0$，t 时用于购买风险证券的金额为 $\pi(t)$，买无风险证券的金额为 $v(t) - \pi(t)$。

那么 $v(t)$ 满足下列方程

$$\mathrm{d}v(t) = rv(t)\mathrm{d}t + \pi(t)(\mu - r)\mathrm{d}t + \pi(t)\sigma\mathrm{d}B_t^H, \quad v(0) = v_0.$$

由模型2可知上式即为

$$\mathrm{d}v(t) = rv(t)\mathrm{d}t + \pi(t)\sigma\mathrm{d}\widetilde{B}_t^H, \quad v(0) = v_0, \quad t \in [0,T],$$

即

$$\mathrm{e}^{-rt}v(t) = v_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-rs}\pi(s)\sigma\mathrm{d}\widetilde{B}_s^H, \quad t \in [0,T]. \tag{13}$$

这时由算术平均确定的亚式期权，赋予持有者在终期 T 时的权益为

$$f_T = \Big[\frac{1}{T}\int_0^T P_t\mathrm{d}t - k_2\Big]^+,$$

那么该期权的套期保值策略为自融资策略 $\{\pi(t), t \in [0,T]\}$，使得由 (13) 所确定的 $v(T) = f_T$。

由模型确定的金融市场的无套利性可知：$v_0 = \widetilde{E}[\mathrm{e}^{-rT} f_T]$。

定理2 具有算术平均支付函数的亚式期权 f_T 的套期保值策略为在任一时刻 s 时，购买股票金额为 π_s

$$\pi_s = \mathrm{e}^{rs}\widetilde{E}[D_s(\mathrm{e}^{-rT} f_T) \mid \mathcal{F}_s]/\sigma, \quad 0 \le s \le T.$$

引理5 设 $F = (F_1, \cdots, F_k) \in (D_{2.1})^k$, $\varphi \in C^1(\mathbf{R}^k)$ 满足

$$\Big\{\widetilde{E}|\varphi(F)|^2 + \Big\|\sum \frac{\partial}{\partial x_i}(F)DF_i\Big\|^2\Big\}^{1/2} < \infty,$$

那么 $\varphi(F) \in D_{2,1}$，且

$$D\varphi(F) = \sum\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(F)\Big)DF_i.$$

证明 见 [4]。

定理2的证明 设函数 $F: \Omega \to \mathbf{R}$ 具有形式 $F(w) = f(B_{t_1}^H, \cdots, B_{t_n}^H)$，对于 $n \in N$ $(t_1, t_2, \cdots, t_n) \in [0,T]^n$, $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$。

$$D_s^H F(w) \triangleq \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j}(B_{t_1}^H, \cdots, B_{t_n}^H)R_H(t_j, s),$$

其中

$$R_H(s,t) = \frac{C_H}{2}\big(S^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}\big)C_H = \frac{\Gamma(2-2H)\cos(H\pi)}{(1-2H)H\pi},$$

$\Gamma(\cdot)$ 为 Γ 函数。

设 S 表示由上述 F 组成的集合，对于 $p\geq 1$ 在 S 中引入范数 $\|\cdot\|_{H,p,1}$：

$$\|F\|_{H,P,1}\triangleq\{E_H\left[\,|F|^p+\|DF\|^p\,\right]\}^{1/p},$$

其中 $\|\cdot\|$ 为 $L^2([0,T])$ 上的范数。让

$$h_T=\frac{1}{T}\int_0^T p_t\mathrm{d}t-k_2=\frac{1}{T}\int_0^T p_0\exp\Big(\sigma\widetilde{B}_t^H+rt-\frac{1}{2}\sigma^2t^{2H}\Big)\mathrm{d}t-k_2,\quad \varphi(x)=x^+,$$

那么 $f_T=\varphi(h_T)$，而

$$D_sh_T=\frac{p_0}{T}\Big[h_T+k_2-\int_0^s\exp\Big(\sigma\widetilde{B}_t^H+rt-\frac{1}{2}\sigma^2t^{2H}\Big)\mathrm{d}t\Big],\quad 0\leq s\leq T,$$

设 $\rho:R\to[0,\infty)$，$\rho\in C^\infty$。具有支撑集 $[0,1]$ 且满足

$$\int_0^1\rho(z)\mathrm{d}z=1.$$

现在定义 φ 的修正序列

$$\varphi_n(q)=\int_0^1\varphi\Big(q+\frac{z}{n}\rho(z)\mathrm{d}z\Big)=n\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\rho(ny-nq)\mathrm{d}y,\quad 0\leq\varphi_n(q)\leq\varphi(q).$$

那么就有

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(q)=\varphi(q),\quad \lim_{n\to\infty}\varphi_n'(q)=D^+\varphi(q),$$

D^+ 为右导数且

$$q\geq 0,\quad 0\leq\varphi_n(h_T)\leq\varphi(h_T)=f_T,\quad |\,\varphi_n'(h_T)D_sh_T\,|\leq D_sh_T<\infty.$$

由引理5可知：$\varphi_n(h_T)\in D_{2,1}$ 且

$$D_s\varphi_n(h_T)=\varphi_n'(h_T)D_sh_T,\quad 0\leq s\leq T,$$

由控制收敛定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\{\widetilde{E}\,|\,\varphi_n(h_T)-f_T\,|^2+\|D_s\varphi_n(h_T)-D^+\varphi(h_T)D_sh_T\|^2\}^{1/2}=0.$$

而由算子 D 的闭性可知 $f_T\in D_{2,1}\subset L^2(p)$；由引理1可知

$$\mathrm{e}^{-rT}f_T=\widetilde{E}(\mathrm{e}^{-rT}f_T)+\int_0^T\widetilde{E}\big[D_s(\mathrm{e}^{-rT}f_T)\,|\,\mathcal{F}_s\big]\mathrm{d}\widetilde{B}_t^H.\tag{14}$$

而由 (13) 可得

$$\mathrm{e}^{-rT}v(T)=v_0+\int_0^T\mathrm{e}^{-rs}\pi(s)\sigma\mathrm{d}\widetilde{B}_s^H.\tag{15}$$

比较 (14) (15) 可得

$$\pi(s)=\mathrm{e}^{rs}\widetilde{E}\big[D_s(\mathrm{e}^{-rT}f_T)\,|\,\mathcal{F}_s\big]/\sigma,\quad 0\leq s\leq T.$$

6 结束语

本文考虑了标的资产价格服从分数维布朗运动时，具有算术平均支付的一种亚式期权的定价与套期保值，采用分式It'o型积分理论通过一系列的变换与Merton对冲风险的思想而获得其定价方程。运用Malliavin分析与一般地Clark公式最后得到了关于亚式期权的套期保值策略，而现实中股票的价格波动往往表现大范围的相依性(大尾性质)与自相似性，而本文的研究考虑了这些因素,因而从理论的角度比较客观地对亚式期权给出了一种定价与套期保值。

参考文献：

[1] Lin S J. Stochastic analysis of fractional Brownian motions[J]. Stochastics and Stochastics Reports, 1995, 55(1-2): 121-140

[2] Duncan, Hu T E Y, Pasik-Duncan B. Stochastic calculus for fractional Brownian motion I theory[J]. SIAM J Control Option, 2000, 38: 582-612

[3] Boualem Djehiche, M'hamed Eddahhi. Hedging options in market models modulated by the fractional Brownian motion[J]. Stochastic Analysis and Application, 2001, 19(5): 753-770

[4] Decreusefond L, Ustumel A S. *Stochastic analysis of the fractional Brownian motion*[J]. *Potential Analysis*, 1999, 10: 177-214

[5] Roger L C G. Arbitrage with fractional Brownian motion[J]. Mathematical Finance, 1997, 7: 95-105

[6] Aase K, Ksendal B. White noise generalizations of the Clark-Ocone theorem with application to mathematical finance[J]. Finance and Stochastics, 2000, 4(4): 465-496

[7] Comte F, Renault E. Long memory in continuous-time stochastic volatility models[J]. Mathematical Finance, 1998, 9(4): 291-323

[8] Karatzas I, Ocone D L. A generalized Clark formula with application to optimal portfolios[J]. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 34(3-4): 187-220

[9] AsbjΦrn T, Hansen. A anlytical valuation of American style Asian options[J]. Management Science, 2000, 46(8): 1116-1136

[10] Rogers L C G. The value of an Asia option[J]. J Appl Prob, 1995, 32: 1077-1088

[11] 杨昭军. 一种亚式期权的套期保值策略[J]. 应用数学学报，2001, 24(1): 56-60

[12] 陈超，邹捷中，刘国买. 股票价格服从跳—扩过程的期权定价模型[J]. 管理工程学报，2001, 15(2): 74-75

Pricing and Hedging of an Asia Option Whose Price of Underlying Asset Follows Fractional Brown Motion

LIU Xuan-hui[1], XUE Yun[1], XU Cheng-xian[2]

(1- College of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048;
2- School of Science, Xi'an Jiaontong Univeristy, Xi'an 710049)

Abstract: Under the assumption that the price of underlying asset follows a fractional Brownian motion, this paper investigates the pricing and hedging strategy for the Asia option with arithmetic averaging by using a Numeraire transformion and replication the price of Asia option is transformed into a European option. By a general Clark Formula and Merton's method, the pricing and hedging strategy are obtained.

Keywords: fractional Brownian motion; Asia option; Numeraire transformion; hedging